Curriculum dell'attività scientifica e didattica di Claudio Asci

Sono nato ad Avezzano (AQ) nel 1972.

- **Titoli di studio**

Il 21/03/1997, ho conseguito la Laurea in Matematica, con la votazione di 110/110 e lode, presso l'Università degli Studi di L'Aquila, con la tesi "Passeggiate aleatorie su gruppi finiti e generazione di numeri pseudo casuali".

Dal 01/11/1997 al 31/10/2001, ho frequentato il Dottorato di Ricerca in Matematica presso l'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" ed il 20/06/2002 ho conseguito il titolo, con la tesi "L'algoritmo IPF e l'algoritmo IPF bayesiano".

- **Formazione e borse di studio**

Dal 01/05/1997 al 30/04/1998, ho ricevuto una borsa di studio dal Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Università degli Studi di L'Aquila.

Dal 27/07/1997 al 30/08/1997, ho frequentato i corsi di Equazioni Differenziali della Fisica Matematica, tenuto dal Prof. B. Kellogg, e di Geometria Differenziale, tenuto dal Prof. G. Thorbergsson, durante il Corso Estivo di Matematica organizzato dalla Scuola Matematica Interuniversitaria presso l'Università di Perugia.

Dal 09/07/2001 al 25/07/2001, ho frequentato i seguenti corsi, organizzati a Saint-Flour (Francia) dall'Ecole d'Eté de Calculus des Probabilités e tenuti rispettivamente dal Prof. O. Catoni, dal Prof. S. Tavaré e dal Prof. O. Zeitouni:

1. Il corso di O. Catoni, dal titolo "Statistical learning theory and stochastic optimization", ha riguardato diversi argomenti legati all'inferenza statistica, tra cui la teoria dell'informazione e quella delle grandi deviazioni.

2. Il corso di S. Tavaré, dal titolo "Ancestral inference in molecular biology", è stato un'esposizione generale di alcune teorie statistiche applicate alla biologia, in particolare alla genetica.

3. Il corso di O. Zeitouni, dal titolo "Random walk in random environments : asymptotic results", ha avuto come oggetto lo studio di catene di Markov discrete multidimensionali, aventi probabilità di transizione aleatorie.

Dal 26/11/2001 al 25/12/2001, ho partecipato a Parigi, presso l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, al progetto di ricerca "Statistical and computational methods for the analysis of spatial data", organizzato dal Centre National de la Recherche Scientifique, sotto la responsabilità scientifica del Prof. C. Robert.

In quel periodo, ho lavorato con il Prof. E. Moulines agli argomenti legati alla mia tesi di Dottorato.

Dal 25/07/2004 al 14/08/2004, ho frequentato il corso di Statistica Matematica, tenuto dal Prof. E. Ragazzini e dal Prof. J. A. Wellner, durante il Corso Estivo di Matematica organizzato a Cortona dalla Scuola Matematica Interuniversitaria.

Dal 03/07/2006 al 15/07/2006, ho frequentato i seguenti corsi, organizzati a Saint-Flour (Francia) dall'Ecole d'Eté de Calculus des Probabilités e tenuti rispettivamente dal Prof. M. Bramson, dalla Dottoressa M. Guionnet dal Prof. S. Lauritzen:

1. Il corso di M. Bramson, dal titolo "Stability and heavy traffic limits for queueing networks", ha riguardato la teoria delle code ed in particolare la loro stabilità.

2. Il corso di M. Guionnet, dal titolo "Lectures on large random matrices", ha avuto come oggetto il comportamento asintotico delle matrici aleatorie aventi ampiezza tendente ad infinito.

3. Il corso di S. Lauritzen, dal titolo "Fundamentals of graphical models", è stato un'esposizione generale della teoria dei modelli grafici.

- **Attività didattica e di ricerca**

Dal 01/07/2002 al 30/06/2004, sono stato titolare dell'assegno di ricerca "Metodi statistici e probabilistici per le previsioni", sotto la responsabilità scientifica del Prof. B. Liseo, presso la Facoltà di Economia dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza", sede di Latina.

Oltre all'attività di ricerca, durante gli anni accademici 2002/2003 e 2003/2004, ho ricevuto settimanalmente gli studenti degli insegnamenti di "Introduzione alla Statistica", "Relazioni Statistiche e Laboratorio", "Statistica applicata all'economia" e "Serie storiche finanziarie". Ho inoltre partecipato alle sessioni di esame relative a tali insegnamenti.

Nel mese di giugno del 2003, ho tenuto delle lezioni di recupero per gli studenti del corso "Introduzione alla Statistica".

Nell'anno accademico 2005/2006, sono stato titolare di un contratto per l'insegnamento di "Calcolo", del Corso di Laurea in Chimica, presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Dal 31/03/2006 al 05/05/2006, ho svolto presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di L'Aquila il ciclo di seminari di calcolo delle probabilità dal titolo "Le catene di Markov, tra probabilità, algebra e applicazioni fisiche".

Dal 01/06/2006 al 30/11/2006, sono stato titolare di un contratto di collaborazione scientifica legato al progetto di ricerca "Processi stocastici e applicazioni. Verifica dell'ipotesi di indipendenza condizionale. Approccio bayesiano non parametrico", presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".

Dal 15/12/2006, sono entrato in servizio come Ricercatore Universitario per il settore scientifico-disciplinare MAT/ 06 (Probabilità e Statistica Matematica) presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di Trieste e a decorrere dal 15/12/2009 ho avuto ho ottenuto la conferma in ruolo.

Nell'anno accademico 2006/2007, sono stato titolare dell'insegnamento di "Calcolo delle Probabilità", della Laurea Magistrale in Matematica, ed ho partecipato alle sessioni di esame relative agli insegnamenti di "Matematica e Statistica", della Laurea in Scienze Biologiche e della Laurea in Scienze Naturali, e di "Matematica e Informatica", della Laurea in Biotecnologie della Facoltà di Medicina e Chirurgia.

Dal giugno all'agosto 2007, ho collaborato con la rivista "Journal of Theoretical Probability" in qualità di revisore di un articolo.

Nell'anno accademico 2007/2008, sono stato titolare dell'insegnamento di "Probabilità e Statistica", della Laurea Triennale in Matematica, ed ho partecipato alle sessioni di esame relative agli insegnamenti di "Matematica e Statistica" e di "Laboratorio di Informatica", della Laurea in Scienze Biologiche e della Laurea in Scienze Naturali.

Nel mese di settembre del 2007, ho inoltre tenuto le lezioni del precorso per gli studenti di "Matematica e Statistica".

Nell'anno accademico 2008/2009, sono stato titolare dell'insegnamento di "Probabilità e Statistica", della Laurea Triennale in Matematica, ed ho partecipato alle sessioni di esame relative all'insegnamento di "Probabilità e Statistica", della Laurea in Informatica.

Nell'anno accademico 2009/2010, sono stato titolare dell'insegnamento di "Probabilità e Statistica", della Laurea Triennale in Matematica, ed ho partecipato alle sessioni di esame relative agli insegnamenti di "Meccanica analitica", della Laurea Triennale in Matematica, di "Istituzioni di Fisica Matematica 2", della Laurea Magistrale in Matematica, e, nel mese di giugno, di "Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici" e "Probabilità e Statistica" della Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica e della Laurea in Ingegneria Meccanica della Facoltà di Ingegneria.

Nell'anno accademico 2010/2011, sono stato titolare dell'insegnamento di "Probabilità e Statistica", della Laurea Triennale in Matematica, ed ho partecipato alle sessioni di esame relative agli insegnamenti di "Meccanica analitica", della Laurea Triennale in Matematica, e di "Istituzioni di Fisica Matematica 2", della Laurea Magistrale in Matematica.

Dal settembre 2011 all'agosto 2012, mi sono collocato in aspettativa dal ruolo di ricercatore universitario, ai sensi dell'art. 14 del D.P.R. n. 382/1980, e sono tornato in servizio nel settembre 2012 presso il Dipartimento di Matematica e Geoscienze.

Dal 17/10/2011 al 16/10/2013, ho partecipato al programma di ricerca PRIN 2009 dal titolo "Teorie cinetiche per la fluidodinamica ed i microsistemi", della durata di due anni.

Nell'anno accademico 2012-2013, ho partecipato alle sessioni di esame relative all'insegnamento di "Statistica", della Laurea Triennale in Scienze Naturali, e, nella sessione autunnale, di “Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici”, della Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica.

Nell’anno accademico 2013-2014, sono stato titolare dell’insegnamento di “Calcolo delle Probabilità”, della Laurea Magistrale in Matematica, ed ho svolto parte dell’insegnamento di “Istituzioni di Matematica”, della Laurea Triennale in Scienze e Tecnologie per l’Ambiente e la Natura. Inoltre, nella sessione invernale, ho partecipato agli esami relativi all’insegnamento di “Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici”, della Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica.

Nell’anno accademico 2014-2015, sono stato titolare degli insegnamenti di “Calcolo delle Probabilità”, della Laurea Magistrale in Matematica, e di “Metodi Probabilistici e Statistici e Processi Stocastici”, della Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica.

Nell’anno accademico 2015-2016, sono stato titolare degli insegnamenti di “Calcolo delle Probabilità”, della Laurea Magistrale in Matematica, e di “Probabilità e Statistica”, della Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica.

Negli anni accademici 2016-2017 e 2017-2018, sono stato titolare degli insegnamenti di “Calcolo delle Probabilità Superiore”, della Laurea Magistrale in Matematica, e di “Probabilità e Statistica”, della Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica.

Nel primo semestre dell’attuale anno accademico 2018-2019, sono titolare dell’insegnamento di “Calcolo delle Probabilità Superiore”, della Laurea Magistrale in Matematica.

- **Risultati di ricerca**

Catene di Markov per la generazione di vettori aleatori uniformi

Nei primi anni del mio Dottorato di Ricerca, dal 1997 al 1999, la mia attività ha riguardato prevalentemente la generalizzazione di risultati ottenuti con la mia tesi di laurea. In questa, ho studiato la catena di Markov definita dalla seguente successione ricorsiva affine di vettori aleatori, a valori in $\mathbf{Z}_p^k$:

$$\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n \pmod p,$$

dove p e $\det(A)$ sono relativamente primi, A è una matrice invertibile ed intera, $\{\mathbf{B}_n\}_n$ è una successione di vettori aleatori indipendenti ed identicamente distribuiti, a valori in $\mathbf{Z}^k$.

Supponendo semplicemente che il supporto della legge di $\mathbf{B}_n$ non sia parallelo ad alcun sottospazio proprio di $\mathbf{Q}^k$ invariante per A, ho dimostrato la convergenza della legge di $\mathbf{X}_n$ alla distribuzione uniforme su $\mathbf{Z}_p^k$. Ho inoltre studiato, in funzione di p, la velocità di convergenza della catena, ottenendo i seguenti risultati:

1. Per una qualsiasi matrice A invertibile ed intera, $O(p^2 \ln p)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme.

2. Se la matrice A ha autovalori interi, di cui solo uno di modulo uguale ad 1, $O(p^2)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme. Se A ha almeno un autovalore intero di modulo uguale ad 1, $O(p^2)$ passi sono necessari.

3. Se la matrice A ha autovalori interi, di modulo diverso da 1, allora $O((\ln p)^2)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme. Se A ha almeno un autovalore intero, di modulo diverso da 1, allora $O(\ln p)$ passi sono necessari.

4. Se la matrice A è diagonale ed ha autovalori interi, di modulo diverso da 1, alcune ulteriori condizioni sul supporto della legge di $\mathbf{B}_n$ implicano che $O(\ln \ln \ln \ln p)$ passi sono sufficienti.

Il mio lavoro è stato pubblicato, nell'aprile 2001, dalla rivista "Journal of Theoretical Probability", con il titolo "Generating uniform random vectors" [1].

Nel 2007, ho migliorato i precedenti risultati 2, 3 e 4 rispettivamente nel seguente modo:

5 Se la matrice A ha autovalori radici di numeri interi, di cui solo uno di modulo uguale ad 1, $O(p^2)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme. Se A ha almeno un autovalore radice dell'unità, $O(p^2)$ passi sono necessari.

6 Se la matrice A ha autovalori di modulo diverso da 1, allora $O((\ln p)^2)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme. Se A ha almeno un autovalore di modulo diverso da 1, allora $O(\ln p)$ passi sono necessari.

7 Se la matrice A ha autovalori radici di numeri interi, di modulo diverso da 1, allora $O(\ln \ln \ln \ln p)$ passi sono sufficienti.

Nel settembre 2009, questi risultati sono stati pubblicati dalla rivista "Journal of Theoretical Probability", in un articolo dal titolo "Generating uniform random vectors in $\mathbf{Z}_p^k$: the general case" [3].

Nel 2008, ho inoltre migliorato i punti 1 e 5 nel seguente modo:

8 Per una qualsiasi matrice A invertibile ed intera, $O(p^2)$ passi sono sufficienti per approssimare la distribuzione uniforme.

9 Se la matrice A ha almeno un autovalore di modulo uguale ad 1, $O(p^2)$ passi sono necessari.

Nel giugno 2009, questi risultati sono stati pubblicati dalla rivista "Statistics and Probability Letters", in un articolo dal titolo "Asymptotic behavior of an affine random recursion in $\mathbf{Z}_p^k$ defined by a matrix with an eigenvalue of size 1" [2].

Dal 2010 al 2012, ho studiato il caso continuo, cioè la successione ricorsiva di vettori aleatori reali definiti da:

$$\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n + \mathbf{B}_n \pmod{p},$$

dove $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^k$, A è una matrice invertibile ed intera, p è un numero reale positivo, $\{\mathbf{B}_n\}_n$ è una successione di vettori aleatori indipendenti ed identicamente distribuiti, a valori in $\mathbf{R}^k$.

Ho provato che, sotto opportune ipotesi sulla legge dei vettori aleatori $\mathbf{B}_n$, la successione $\{\mathbf{X}_n\}_n$ è uniformemente ergodica, cioè converge in variazione totale, con velocità geometrica ed uniformemente rispetto al valore $\mathbf{x}_0$, verso un vettore aleatorio uniformemente distribuito in $[0, p)^k$. Inoltre, ho valutato la velocità di convergenza in termini di A, p, k e della legge di $\mathbf{B}_n$ ed ho provato che, se A ha almeno un autovalore radice dell'unità, $O(p^2)$ passi sono necessari per approssimare la distribuzione uniforme. Quest'ultimo risultato è analogo a quello, da me ottenuto in precedenza, relativo al caso in cui $\mathbf{x}_0$, p e $\mathbf{B}_n$ assumono solo valori discreti.

Nel 2013, questi risultati sono stati pubblicati dalla rivista "Markov Processes and Related Fields", in un articolo dal titolo "Convergence in total variation of an affine random recursion in $[0, p)^k$ to a uniform random vector" [4].

Comportamento asintotico degli algoritmi IPF e BIPF

Negli ultimi anni del mio Dottorato di Ricerca, dal 2000 al 2002, in collaborazione con M. Piccioni, ho studiato un algoritmo deterministico iterativo, l'algoritmo IPF, utilizzato nella letteratura matematica per massimizzare la funzione di verosimiglianza di un modello log-lineare gerarchico, data una tabella di contingenza osservata.

Ho studiato inoltre un analogo algoritmo stocastico, l'IPF bayesiano, o BIPF, che serve per campionare tabelle di probabilità appartenenti ad un modello log-lineare.

Nel caso particolare da noi considerato (modello gerarchico log-affine con interazione tripla costante per tre variabili binarie), ogni passo dell'algoritmo IPF è costituito da tre iterazioni, ciascuna delle quali fissa l'interazione tripla di una tabella di probabilità $2 \times 2 \times 2$ ed impone che la tabella marginale rispetto a due delle tre variabili sia uguale ad una fissata tabella di probabilità 2×2. Tale tabella è la medesima per ogni iterazione ed è definita da

$$a_{ij} = a_{ij}(\beta, \varepsilon) = \begin{cases} \beta\varepsilon & \text{se } i = j \\ \beta\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

dove $\beta > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

L'algoritmo BIPF è definito in modo analogo, poiché l'elemento generico a_{ij} della tabella precedente è sostituito da una variabile aleatoria con legge Gamma di parametri $(a_{ij}, 1)$.

Si verifica facilmente che tali algoritmi sono definiti anche quando, per $\varepsilon \leq \frac{1}{6}$, le tabelle marginali utilizzate per le iterazioni, pur se compatibili tra di loro, non provengono da una tabella congiunta con elementi positivi. In tal caso, non si possono più utilizzare i risultati tradizionali sull'IPF e sul Gibbs Sampler, per dedurre la convergenza degli algoritmi rispettivamente nei casi deterministico e stocastico.

Nella nostra ricerca, abbiamo dimostrato che, nel caso $\varepsilon \leq \frac{1}{6}$, a partire da una qualsiasi tabella di probabilità positiva, l'IPF converge verso una tabella limite che si può calcolare esplicitamente, avente due entrate nulle.

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nel dicembre 2003, dalla rivista "Kybernetika", con il titolo "A note on the IPF algorithm when the marginal problem is unsolvable" [11].

Dal 2007 al 2008, abbiamo studiato il comportamento asintotico sia dell'IPF che del BIPF nel caso più generale in cui la tabella $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\beta, \varepsilon)$ è sostituita da

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_1, a_2, b) = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix},$$

dove $a_1, a_2, b > 0$.

In questo caso, l'IPF ed il BIPF sono definiti anche nel caso $a_1 + a_2 - b \leq 0$, corrispondente alla situazione in cui non esiste una tabella di probabilità $2 \times 2 \times 2$ positiva avente le tre tabelle marginali 2×2 uguali ad $\mathbf{a}(a_1, a_2, b)$.

Nel nostro lavoro di ricerca, abbiamo considerato soprattutto il caso $a_1 + a_2 - b \leq 0$, ottenendo per entrambi gli algoritmi dei risultati molto simili tra loro.

Abbiamo dimostrato che, a partire da una qualsiasi tabella di probabilità positiva, l'IPF converge verso una tabella limite avente due entrate nulle.

In modo analogo, abbiamo provato che il vettore aleatorio (ad 8 componenti) che definisce l'algoritmo IPF bayesiano converge in legge verso un vettore aleatorio avente due componenti nulle e le rimanenti espresse in funzione delle variabili aleatorie indipendenti

$$G_1, G_2, G_3, G_4, X, Y,$$

dove G_1, G_2, G_3, G_4 hanno legge Gamma di parametri rispettivamente $(a_1, 1)$, $(b, 1)$, $(b, 1)$, $(a_2, 1)$, mentre X ed Y hanno legge rispettivamente $\mu_{a_1,a_2,b}$ e $\mu_{a_2,a_1,b}$ (leggi definite in un paragrafo successivo).

L'interesse di questi risultati sta nel fatto che, quando le marginali non provengono da una congiunta, il punto (o la legge) limite non è più simmetrico e dà quindi luogo ad un ciclo limite, se scomponiamo le iterazioni nei tre passi che le costituiscono.

Nell'aprile 2009, il nostro lavoro è stato pubblicato dalla rivista "Kybernetika", in un articolo dal titolo "Asymptotic behaviour of a BIPF algorithm with an improper target" [13].

Caratteristiche locali per densità coniugate a famiglie esponenziali

Dal 2004 al 2006, in collaborazione con M. Piccioni, ho generalizzato alcuni risultati relativi al caso stocastico dell'algoritmo IPF ed ho dato delle condizioni necessarie e sufficienti perché delle densità d-dimensionali (eventualmente non integrabili), coniugate a famiglie esponenziali, siano stazionarie per un processo di Markov che generalizza l'ordinario Gibbs Sampler a blocchi. Precisamente, se si ha $\bigcup_{l=1}^{m} B_l = \{1, ..., d\}$ e se i sottoinsiemi B_l sono dei "tagli", allora esistono delle probabilità condizionate (integrabili) $q_l\left(\theta_{B_l}; \theta_{B_l^c}\right)$ che danno luogo a densità congiunte $q(\theta) = q_l\left(\theta_{B_l}; \theta_{B_l^c}\right) h_l\left(\theta_{B_l^c}\right)$ non necessariamente integrabili. Probabilità condizionate di questo tipo sono state studiate in letteratura da Hobert e Casella (1996 e 1998) e vengono dette caratteristiche locali.

Come sottoprodotto di questo risultato, abbiamo mostrato che la ricorrenza positiva del BIPF è equivalente all'esistenza di una soluzione positiva del problema associato di determinare una congiunta da marginali fissate (problema marginale). Questo risultato copre non solo leggi Gamma – Dirichlet condizionate per le interazioni di un modello gerarchico Poisson - binomiale, ma anche leggi Wishart condizionate per le covarianze inverse di un modello grafico gaussiano.

Il lavoro relativo a tali argomenti è stato pubblicato nel dicembre 2007 dalla rivista "Scandinavian Journal of Statistics", con il titolo "Functionally compatible local characteristics for some natural conjugate exponential families" [12].

Processi a valori nelle misure di probabilità per l'analisi bayesiana non parametrica

Dopo il conseguimento del Dottorato, dal 2002 al 2004 la mia attività di ricerca ha riguardato prevalentemente lo studio di un particolare processo stocastico: il processo iper Dirichlet, che appartiene alla classe dei processi iper markoviani, introdotti da A. P. Dawid e S. L. Lauritzen (Hyper Markov laws in the statistical analysis of decomposable graphical models. The Annals of Statistics 21, 3 (1993), 1272-1317).

Nel caso più semplice, un processo iper Dirichlet è un processo a valori nello spazio delle misure di probabilità su $\mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2} \times \mathbf{R}^{d_3}$, la cui legge $HDI(\rho_{12}, \rho_{23})$ è definita a partire da due misure finite ρ_{12} e ρ_{23} su $\mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2}$e $\mathbf{R}^{d_2} \times \mathbf{R}^{d_3}$ rispettivamente, con la stessa marginale ρ_2 su $\mathbf{R}^{d_2}$. Il processo iper Dirichlet Σ è l'unico processo (in legge) tale che, indicando con Σ_{12}, Σ_{23} e Σ_2 le corrispondenti marginali su $\mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^{d_2}$, $\mathbf{R}^{d_2} \times \mathbf{R}^{d_3}$ e $\mathbf{R}^{d_2}$, si ha:

1. $\Sigma(dx, dy, dz) = \Sigma_{1|2}(dx|y)\Sigma_2(dy)\Sigma_{3|2}(dz|y)$;
2. Σ_{12} e Σ_{23} hanno leggi Dirichlet $DI(\rho_{12})$ e $DI(\rho_{23})$ rispettivamente;
3. $\Sigma_{12} \perp \Sigma_{23}|\Sigma_2$.

Il principale risultato ottenuto nella mia attività di ricerca, svolta in collaborazione con G. Nappo e M. Piccioni, è un teorema di convergenza: precisamente, la dimostrazione che il processo iper Dirichlet si può ottenere come il limite, in legge, di opportune probabilità aleatorie ottenute discretizzando gli spazi $\mathbf{R}^{d_1}$, $\mathbf{R}^{d_2}$ e $\mathbf{R}^{d_3}$.

Nel nostro lavoro, abbiamo anche dimostrato che Σ è un processo di Dirichlet solo in casi particolari, come ad esempio quando la marginale ρ_2 non ha atomi. Inoltre, abbiamo dato una rappresentazione particolarmente conveniente di Σ, che generalizza quella di J. Sethuraman e R. C. Tiwari (Convergence of Dirichlet measures and the interpretation of their parameter. Statistical Decision Theory and Rel. Top. III 2 (1982), 305-315) per il processo di Dirichlet.

Grazie a questa rappresentazione, abbiamo ottenuto un risultato che giustifica il possibile uso di una legge iper Dirichlet come distribuzione a priori non parametrica.

Precisamente, se Σ è un processo iper Dirichlet con legge $HDI(\rho_{12}, \rho_{23})$ e se, condizionatamente a Σ, il vettore delle osservazioni $((X_i, Y_i, Z_i), i = 1, ..., m)$ ha componenti indipendenti, ognuna con legge Σ, allora, condizionatamente alle osservazioni, la legge di Σ è

$$HDI\left(\rho_{12} + \sum_{i=1}^{m} \delta_{(X_i,Y_i)}, \rho_{23} + \sum_{i=1}^{m} \delta_{(Y_i,Z_i)}\right).$$

Questo risultato stabilisce che la classe dei processi iper Dirichlet è coniugata rispetto al campionamento i. i. d., proprio come avviene per la classe dei processi di Dirichlet. (Sethuraman, J. A constructive definition of Dirichlet priors. Statistica Sinica 4 (1994), 639-650).

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nell'aprile 2006, dalla rivista "Journal of Multivariate Analysis", con il titolo "The hyper Dirichlet process and its discrete approximations: The butterfly model" [10].

Frazioni continue aleatorie applicate a leggi Beta generalizzate

Dal 2006 al 2007, in collaborazione con G. Letac e M. Piccioni, ho studiato una particolare famiglia di distribuzioni unidimensionali, dipendenti dalla tripla di parametri (a, a', b) e definite nel seguente modo:

$$\mu_{a,a',b}(dx) \propto x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ {}_2F_1(a, b; a + a'; x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)dx,$$

dove

$${}_2F_1(a, b; a + a'; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(a + a')_n} x^n$$

e la successione $\{(y)_n\}_n$ è definita da $(y)_0 = 1$, $(y)_{n+1} = (y + n)(y)_n$.

La famiglia delle distribuzioni precedenti generalizza quella delle distribuzioni Beta di parametri a ed a', alle quali ci si riconduce nel caso $b = a + a'$.

Queste distribuzioni Beta generalizzate hanno diverse proprietà, come l'iniettività della funzione $(a, a', b) \longrightarrow \mu_{a,a',b}$ ed il fatto che $\mu_{a,a',b}$ è simmetrica rispetto ad $\frac{1}{2}$ se e solo se $a = a'$, $b = a + a'$.

Il principale risultato ottenuto nella nostra ricerca riguarda la convergenza con probabilità 1, ad una variabile aleatoria con distribuzione $\mu_{a,a',b}$, della seguente frazione continua aleatoria:

$$\frac{1}{1 + \frac{W_1}{1 + \frac{W_1'}{1 + \frac{W_2}{1 + \dots}}}},$$

dove $\{W_n\}_{n\geq 1}$ e $\{W_n'\}_{n\geq 1}$ sono due successioni indipendenti di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, con W_n distribuita come il rapporto di due variabili aleatorie Gamma indipendenti di parametri $(b, 1)$ ed $(a, 1)$

e W_n' distribuita come il rapporto di due variabili aleatorie Gamma indipendenti di parametri $(b, 1)$ ed $(a', 1)$.

Questo risultato, tra l'altro, consente di determinare la legge limite della catena di Markov definita dall'algoritmo BIPF, nel caso trattato in [9].

Il nostro lavoro, con il titolo "Beta-hypergeometric distributions and random continued fractions" [9], è stato pubblicato nel settembre 2008 dalla rivista "Statistics and Probability Letters".

Dinamica lagrangiana delle particelle "tracer" in fluidi di Navier-Stokes

Dal 2010 al 2011, in collaborazione con M. Tessarotto, C. Cremaschini, A. Soranzo, G. Tironi e Marco Tessarotto, ho studiato il comportamento di particelle di una certa sostanza (tracer particles) immesse in un fluido di una sostanza uguale o diversa. Queste particelle non interagiscono tra di loro, dipendono solo dallo stato locale del fluido in cui sono immesse e non lo perturbano.

Se supponiamo che la velocità $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ di una tracer particle sia una variabile aleatoria continua avente densità $f_{\mathcal{V}}(\mathbf{v}; t)$ e media $\mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)$ uguale alla velocità locale del fluido, dal vincolo

$$|\mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)| << |\mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)|$$

derivano delle limitazione alla dinamica di tali particelle. Innanzitutto, esse devono soddisfare la cosiddetta equazione cinetica inversa $Lf_{\mathcal{V}} = 0$. Inoltre, ponendo dei vincoli su $\mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(\mathbf{r}(t), t)$ e sulla pressione cinetica specifica $\widehat{p_1}(\mathbf{r}, t)$, abbiamo provato diversi risultati, tra i quali:

1. Le tracer perticles sono soluzioni del sistema dinamico di Navier-Stokes.
2. Esiste un modello statistico basato sulle tracer particles che può essere usato, mediante campionamento, per stimare i parametri dello stato locale del fluido.
3. La media di $\mathcal{V}$ soddisfa un'equazione statistica di Fokker-Planck ed un Teorema H.
4. Il modello statistico descritto al punto 2 permette di studiare la turbolenza del fluido e ne costituisce un modello chiuso.

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nel marzo 2012, dalla rivista "The European Physical Journal Plus", in un articolo dal titolo "The Lagrangian dynamics of thermal tracer particles in Navier-Stokes fluids" [14].

Descrizione statistica del sistema dinamico classico di Boltzmann-Sinai

Nel 2015, in collaborazione con M. Tessarotto, C. Cremaschini, A. Soranzo e G. Tironi, ho studiato il problema, introdotto da Boltzmann nel 1872, della descrizione statistica mediante un'equazione cinetica del sistema dinamico classico costituito da N sfere identiche. Il nostro obiettivo è stato la determinazione delle condizioni di esistenza globale e regolarità di tale equazione cinetica.

A questo scopo, abbiamo determinato delle condizioni sugli urti singoli e multipli di tali sfere, in termini della loro densità di probabilità congiunta N-dimensionale $\rho^{(N)} = \rho^{(N)}(\mathbf{x}, t)$, dove $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N)$, essendo $\mathbf{x}_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ il vettore che definisce la posizione e la velocità della sfera $i-$esima, per $i = 1, ..., N$. Inoltre, abbiamo stabilito delle condizioni di esistenza globale per l'equazione di Liouville in N variabili, scritta sia in forma differenziale che integrale. Più in dettaglio, abbiamo provato i seguenti risultati:

1. Se $\widehat{I}_i = (t_i, t_{i+1})$ è un intervallo tra due tempi consecutivi di collisione tra le sfere, per ogni $t_0, t \in \widehat{I}_i$ vale l'equazione integrale di Liouville
$$\rho^{(N)}(\mathbf{x}(t), t) = \rho^{(N)}(\mathbf{x}(t_0), t_0).$$

2. Per ogni tempo di collisione t_i, si ha
$$\rho^{(+)(N)}(\mathbf{x}^{(+)}(t_i), t_i) = \rho^{(N)}(\mathbf{x}^{(+)}(t_i), t_i),$$
dove $\mathbf{x}^{(+)}(t_i)$ indica il sistema dopo la collisione, mentre $\rho^{(N)}(\mathbf{x}(t_i), t_i)$ e $\rho^{(+)(N)}(\mathbf{x}(t_i), t_i)$ indicano la densità congiunta rispettivamente durante e dopo la collisione.

3. Si ha l'equazione differenziale di Liouville
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(N)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i \rho^{(N)}(\mathbf{x}, t) = 0, \, \forall\, \mathbf{x} \in \overline{\Gamma}_N, \, \forall\, t \in \mathbf{R}^+,$$
per un certo insieme $\overline{\Gamma}_N \subset \mathbf{R}^{6N}$.

Utilizzando i risultati precedenti, abbiamo inoltre dimostrato l'esistenza globale di una generica densità di probabilità N-dimensionale e di particolari densità che massimizzano l'entropia di Boltzmann-Shannon e si possono fattorizzare in termini delle loro densità marginali. Tali densità marginali sono unicamente definite e soddisfano globalmente l'equazione cinetica. Infine, abbiamo studiato le ipotesi di validità globale dell'equazione di Boltzmann asintotica e del Teorema H di Boltzmann.

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nell'agosto 2015, dalla rivista "The European Physical Journal Plus", in un articolo dal titolo "Global validity of the Master kinetic equation for hard-sphere systems" [15].

Descrizione asintotica dell'equazione cinetica Master per sistemi dinamici costituiti da un gran numero di particelle

Dal 2016 al 2017, in collaborazione con M. Tessarotto, ho studiato il problema del comportamento asintotico, per N grande, di un sistema dinamico costituito da N sfere rigide, identiche e soggette ad urti elastici singoli, binari o multipli. Siamo partiti dalla trattazione assiomatica della meccanica statistica e dall'equazione cinetica Master, che governa l'evoluzione nel tempo t della densità di probabilità $\rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t)$, dove $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ è il vettore che definisce la posizione e la velocità della prima sfera.

In funzione di opportuni parametri fisici, abbiamo classificato il comportamento asintotico del sistema ed abbiamo stabilito dei legami con l'equazione cinetica di Boltzmann e con quella di Enskog. Precisamente, indichiamo con Ω il dominio in cui si muovono le sfere; se $\varepsilon = \frac{1}{N}$, σ è il diametro delle sfere, L_0^3 è il volume di Ω, $\Delta = \frac{4\pi N\sigma^3}{24L_0^3}$ è il rapporto tra il volume complessivo delle sfere ed il volume di Ω, $\Gamma_{1(1)}$ è il dominio di $\mathbf{x}_1$ e I è il dominio temporale, poniamo

$$L_\rho = \left(\sup_{(\mathbf{x}_1,t)\in\Gamma_{1(1)}\times I} \left\{ \left| \frac{\partial \ln \rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_1,t)}{\partial \mathbf{r}_1} \right| \right\} \right)^{-1}, \; L = \min\left\{L_0, L_\rho\right\};$$

inoltre, diciamo che σ è infinitesimo se $\sigma \sim O\left(\varepsilon^\alpha\right)$, dove $\alpha \in \mathbf{R}^+$, e finito se $\sigma \sim O\left(\varepsilon^0\right)$; infine, diciamo il fluido è diluito se $\Delta \sim O\left(\varepsilon^\beta\right)$, dove $\beta \in \mathbf{R}^+$, e denso se $\Delta \sim O\left(\varepsilon^0\right)$. Abbiamo provato i seguenti risultati:

1. Se $N >> 1$, $\sigma \sim O\left(\varepsilon^\alpha\right)$, $L \sim L_\rho \sim L_0 \sim O\left(\varepsilon^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$, allora σ è infinitesimo, il fluido è diluito e l'equazione cinetica Master coincide con l'equazione cinetica di Boltzmann.

2. Se $N >> 1$, $\sigma \sim O\left(\varepsilon^0\right)$, $L \sim O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$, $L \equiv L_\rho \lesssim L_0$, allora σ è finito, il fluido è diluito e l'equazione cinetica Master ha delle analogie formali con l'equazione cinetica di Enskog.

3. Se $N >> 1$, $\sigma \sim O\left(\varepsilon^\alpha\right)$, $L \sim L_\rho \sim L_0 \sim O\left(\varepsilon^{\alpha-\frac{1}{3}}\right)$, $\alpha \in [0, +\infty)$, allora il fluido è denso.

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nel marzo 2017, dalla rivista "Physics Letters A", in un articolo dal titolo "Asymptotic orderings and approximations of the Master kinetic equation for large hard spheres systems" [16].

Descrizione statistica microscopica dei fluidi granulari incomprimibili di Navier-Stokes

Dal 2016 al 2017, in collaborazione con M. Tessarotto e M. Mond, ho studiato i fluidi granulari incomprimibili di Navier-Stokes, introducendo una forza media di interazione nell'equazione cinetica Master. Abbiamo provato che tale equazione cinetica Master modificata garantisce la condizione di incomprimibilità della densità di massa, la validità dell'equazione fluida di Navier-Stokes e la conservazione dell'entropia di Boltzmann-Shannon. Come conseguenza, abbiamo dimostrato che ogni densità di probabilità $\rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t)$, che evolve nel tempo per mezzo dell'equazione cinetica Master modificata, presenta il fenomeno del decadimento all'equilibrio cinetico, dato dalla seguente densità di probabilità di Maxwell, caratterizzata da stazionarietà ed uniformità spaziale:

$$\rho_M^{(N)}(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} v_{th}^3} \exp\left(-\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_{th}^2} \right),$$

dove v_{th} è la velocità termica.

Il nostro lavoro è stato pubblicato, nel maggio 2017, dalla rivista "The European Physical Journal Plus", in un articolo dal titolo "Microscopic statistical description of incompressible Navier-Stokes granular fluids" [17].

Limite di Boltzmann-Grad per sistemi di sfere rigide

Nel 2017, in collaborazione con M. Tessarotto , C. Cremaschini, M. Mond., A. Soranzo e G. Tironi, ho studiato l'operatore limite $\mathcal{L}_{BG}$ di Boltzmann-Grad per un sistema dinamico costituito da N sfere rigide, identiche e soggette ad urti elastici singoli, binari o multipli. Abbiamo provato che, nonostante l'operatore $\mathcal{L}_{BG}$ sia non commutativo, l'equazione di Boltzmann può essere univocamente determinata; in particolare, essa è simmetrica per inversione temporale. Precisamente, abbiamo provato i seguenti risultati:

1. Indicando con $k_1^{(N)}(\mathbf{r}_1, t)$ il coefficiente di occupazione 1-dimensionale, per ogni $(\mathbf{r}_1, t) \in \Omega \times I$, si ha $\mathcal{L}_{BG} k_1^{(N)}(\mathbf{r}_1, t) = 1$.

2. Indicando con $k_s^{(N)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_s, t)$ il coefficiente di occupazione s-dimensionale, per ogni $s \geq 2$ e per ogni $(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_s, t) \in \Omega^s \times I$, si ha $\mathcal{L}_{BG} k_s^{(N)}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_s, t) = 1$.

3. Indicando con $\rho_s^{(N)}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s, t)$ la densità di probabilità relativa alle prime s sfere, per ogni $s \geq 2$ e per ogni $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s, t) \in \Gamma^s \times I$, si ha

$$\mathcal{L}_{BG} \rho_s^{(N)}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s, t) = \prod_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{BG} \rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_i, t).$$

4. Posto $\widehat{\rho}_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t) = \frac{\rho_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t)}{k_1^{(N)}(\mathbf{r}_1, t)}$, se vale l'equazione cinetica Master, per ogni $(\mathbf{x}_1, t) \in \Gamma_1 \times I$, si ha

$$\mathcal{L}_{BG} L_1 \widehat{\rho}_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t) = L_1 \rho_1(\mathbf{x}_1, t) - \mathcal{C}_{1B} \left(\rho_1 | \rho_1\right) = 0, \tag{1}$$

   dove L_1 è l'operatore differenziale definito da $L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}$, mentre $\mathcal{C}_{1B} \left(\rho_1 | \rho_1\right)$ è l'operatore di collisione di Boltzmann. Di conseguenza, la seconda uguaglianza nell'equazione (1) coincide con l'equazione cinetica di Boltzmann.

5. Per ogni $(\mathbf{x}_1, t) \in \Gamma_1 \times I$, si ha

$$L_1 \mathcal{L}_{BG} \widehat{\rho}_1^{(N)}(\mathbf{x}_1, t) = L_1 \rho_1(\mathbf{x}_1, t).$$

Inoltre, abbiamo provato che, indipendentemente dall'orientazione dell'asse temporale, sotto opportune condizioni di regolarità, l'equazione di Boltzmann ammette una soluzione che decade all'equilibrio cinetico.

Questi risultati sono stati pubblicati, nel febbraio 2018, dalla rivista "Foundations of Physics", in un articolo dal titolo "On the Boltzmann-Grad limit for smooth hard-sphere systems" [18].

Calcolo integrale e differenziale su spazi di Banach infinito-dimensionali

Dal 2013, per ogni $I \subset \mathbf{N}^*$, ho studiato lo spazio di Banach $E_I \subset \mathbf{R}^I$ delle successioni reali limitate $\{x_n\}_{n \in I}$, con la norma

$$\|x\|_I = \sup_{i \in I} |x_i|, \, \forall \, x = (x_i : i \in I) \in E_I,$$

la σ-algebra $\mathcal{B}_I$ data dalla restrizione su E_I della σ-algebra $\mathcal{B}^{(I)} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}$ (dove $\mathcal{B}$ è la σ-algebra di Borel su $\mathbf{R}$) e la topologia $\tau_{\|\cdot\|_I}$. indotta su E_I dalla norma $\|\cdot\|_I$. Inoltre, ho studiato le proprietà delle funzioni $\varphi : U \subset E_J \longrightarrow E_I$ continue e differenziabili su un insieme aperto U, dove $I, J \subset \mathbf{N}^*$, ed ho definito le funzioni C^1 ed i diffeomorfismi; in particolare, ho definito il concetto di funzione (m, σ)-standard $\varphi : U \subset E_J \longrightarrow E_I$, in modo che, sotto opportune ipotesi, essa conservi tutte le proprietà di un diffeomorfismo finito-dimensionale. Successivamente,.ho introdotto le funzioni (m, σ)-generali, che costituiscono una generalizzazione delle funzioni (m, σ)-standard, ed ho definito il determinante delle funzioni lineari (m, σ)-generali, mediante il limite di una successione di determinanti di opportune matrici.

Il principale risultato del mio studio è una formula del cambio di variabili per l'integrazione delle funzioni misurabili reali sullo spazio $\left(\mathbf{R}^I, \mathcal{B}^{(I)}\right)$; questo cambio di variabili avviene mediante funzioni φ (m, σ)-generali ed è ottenuto usando una particulare misura σ-finita $\lambda^{(k,I)}_{N,a,v}$ su $\left(\mathbf{R}^I, \mathcal{B}^{(I)}\right)$, dipendente dai parametri $k \in \mathbf{N}^*$, $I \subset \mathbf{N}^*$, $N \in \mathbf{R}^+$, $a = (a_i : i \in I) \in [0, +\infty)^I$ tale che $\prod_{i \in I : a_i \neq 0} a_i \in \mathbf{R}^+$, $v = (v_i : i \in I) \in E_I$; questa misura, nel caso $|I| = k$ ed $N = 1$, coincide con la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^k$. Precisamente, posto

$$E^{(k,I)}_{N,a,v} = \mathbf{R}^k \times \prod_{i \in I \setminus I_k} \left[v_i - \frac{N}{2} a_i, v_i + \frac{N}{2} a_i \right]$$

e definito in modoanalogo l'insieme $E^{(k,J)}_{N,b,z}$, per certi parametri b, z tali che $\varphi^{-1}\left(E^{(k,I)}_{N,a,v}\right) \subset E^{(k,J)}_{N,b,z}$, ho provato che, per ogni funzione $\varphi : U \subset E_J \longrightarrow E_I$ biunivoca ed (m, σ)-standard, soddisfacente opportune proprietà di regolarità, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $k \geq m$, per ogni funzione misurabile $f : \left(\mathbf{R}^I, \mathcal{B}^{(I)}\right) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ tale che f^+ (o f^-) sia $\lambda^{(k,I)}_{N,a,v}$-integrable e per ogni $B \in \mathcal{B}^{(I)}$, si ottiene il seguente risultato:

$$\int_B f d\lambda^{(k,I)}_{N,a,v} = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi) \left| \det J_{\overline{\varphi}} \right| d\lambda^{(k,J)}_{N,b,z},$$

dove $\overline{\varphi} : U \longrightarrow E_I$ è una funzione ottenuta modificando φ e lo Jacobiano $J_{\overline{\varphi}}$ è definito in modo opportuno.

Questi risultati sono esposti nell'articolo "Integration over an infinite-dimensional Banach space and probabilistic applications" [5] (che tratta il caso in cui φ sia lineare ed è stato pubblicato nel 2014 dalla rivista "International Journal of

Analysis") e nell'articolo "Differentiation theory over infinite-dimensional Banach spaces" [6] (relativo al caso generale e pubblicato nel 2016, dalla rivista "Journal of Mathematics").

Nel 2017, ho studiato in dettaglio le funzioni lineari (m, σ)-generali, esponendo una teoria che generalizza la teoria standard delle matrici $m \times m$, ed ho ottenuto dei risultati pubblicati nel 2018 dalla rivista "Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste", in un articolo dal titolo "Theory of the (m, σ)-general functions over infinite-dimensional Banach spaces" [7].

Nel 2018, ho approfondito lo studio delle funzioni (m, σ)-generali ed ho dimostrato che, se φ è una funzione biunivoca ed (m, σ)-generale, soddisfacente ulteriori proprietà, e se $B \in \mathcal{B}^{(I)}\left(\overset{\circ}{E}{}^{(k,I)}_{N,a,v}\right)$, si ha

$$\int_B f d\lambda^{(k,I)}_{N,a,v} = \int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi) \lim_{n \to +\infty} \left|\det J_{\overline{\varphi}^{(n,n)}}\right| d\lambda^{(k,J)}_{N,b,z},$$

dove $\left\{\overline{\varphi}^{(n,n)}\right\}_{n \geq m}$ è una particolare successione di funzioni tale che $\varphi = \lim_{n \to +\infty} \overline{\varphi}^{(n,n)}$.

Questi risultati sono stati pubblicati nel 2019 dalla rivista "Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste", in un articolo dal titolo "Change of variables' formula for the integration of the measurable real functions over infinite-dimensional Banach spaces" [8].

- **Pubblicazioni**

[1] Asci C. (2001). Generating uniform random vectors. *Journal of Theoretical Probability* **14** (2), 333-356.

[2] Asci C. (2009). Asymptotic behavior of an affine random recursion in defined by a matrix with an eigenvalue of size 1. *Statistics and Probability Letters* **79** (11), 1421-1428.

[3] Asci C. (2009). Generating uniform random vectors in $\mathbf{Z}_p^k$: the general case. *Journal of Theoretical Probability* **22** (3), 791-809.

[4] Asci C. (2013). Convergence in total variation of an affine random recursion in $[0, p)^k$ to a uniform random vector. *Markov Processes and Related Fields* **19**, 125-140.

[5] Asci C. (2014). Integration over an infinite-dimensional Banach space and probabilistic applications. *International Journal of Analysis*. Doi: org/10.1155/2014/404186.

[6] Asci C. (2016). Differentiation theory over infinite-dimensional Banach spaces. *Journal of Mathematics.*. Doi: org/10.1155/2016/2619087.

[7] Asci C. (2018). Theory of the (m, σ)-general functions over infinite-dimensional Banach spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **50**. Doi: 10.13137/2464-8728/20577.

[8] Asci C. (2018). Change of variables' formula for the integration of the measurable real functions over infinite-dimensional Banach spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* **51**. Doi: 10.13137/2464-8728/27067.

[9] Asci C., Letac G. e Piccioni M. (2008). Beta-hypergeometric distributions ad random continued fractions. *Statistics and Probability Letters* **78** (13), 1711-1721.

[10] Asci C., Nappo G. e Piccioni M. (2006). The hyper-Dirichlet process and its discrete approximations: The butterfly model. *Journal of Multivariate Analysis* **97** (4), 895-924.

[11] Asci C. e Piccioni M. (2003). A note on the IPF algorithm when the marginal problem is unsolvable. *Kybernetika* **39** (6), 731-737.

[12] Asci C. e Piccioni M. (2007). Functionally compatible local characteristics for some natural conjugate exponential families. *Scandinavian Journal of Statistics* **34** (4), 829-840.

[13] Asci C. e Piccioni M. (2009). Asymptotic behaviour of a BIPF algorithm with an improper target. *Kybernetika* **45** (2), 169-188.

[14] Asci C., Tessarotto M., Cremaschini C., Soranzo A., Tironi G. e Tessarotto Marco (2012). The Lagrangian dynamics of thermal tracer particles in Navier-Stokes fluids. *The European Physical Journal Plus* **127** (36).

[15] Asci C., Tessarotto M., Cremaschini C., Soranzo A. e Tironi G. (2015). Global validity of the Master kinetic equation for hard-sphere systems. *The European Physical Journal Plus* **2015**, 130: 169. DOI: 10.1140/epjp/i2015-15169-2.

[16] Asci C. e Tessarotto M. (2017). Asymptotic orderings and approximations of the Master kinetic equation for large hard spheres systems. *Physics Letters A* **381**, 1484-1489. Doi: org/10.1016/j.physleta.2017.03.001.

[17] Asci C., Tessarotto M. e Mond M. (2017). Microscopic statistical description of incompressible Navier-Stokes granular fluids. *The European Physical Journal Plus* **132**, 213. Doi: 10.1140/epjp/i2017-11472-2.

[18] Asci C., Tessarotto M., Cremaschini C., Mond. M., Soranzo A. e Tironi G. (2018). On the Boltzmann-Grad limit for smooth hard-sphere systems. *Foundations of Physics* **48**, 271-294. Doi: org/10.1007/s10701-018-0144-5.

Trieste, li 21/11/2020

Claudio Asci