

Non solo tensori: dall'iperdeterminante alla
ricostruzione di immagini

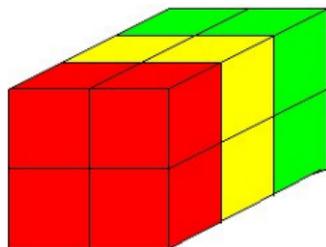
11 Dicembre 2014

Corso di Laurea in Matematica
Università di Trieste

Giorgio Ottaviani, Università di Firenze

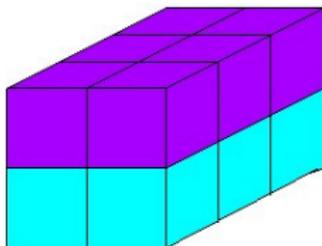
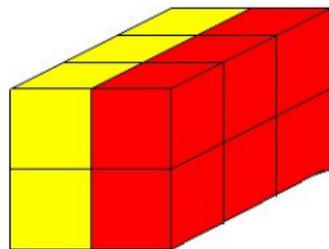
Tensori come matrici multidimensionali

Un *tensore* $a \times b \times c$ è un elemento dello spazio $\mathbb{R}^a \otimes \mathbb{R}^b \otimes \mathbb{R}^c$, e può essere rappresentato come una matrice 3-dimensionale.



Un tensore $2 \times 2 \times 3$.

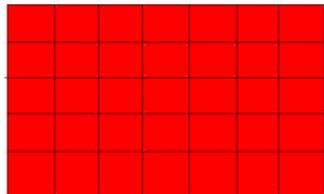
Alcune *fette* di un tensore $2 \times 2 \times 3$.



Eliminazione di Gauss



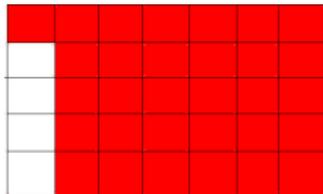
L'eliminazione di Gauss, che risale ai primi dell' ottocento, consiste nel semplificare una matrice, sommando ad una *riga* il multiplo di un'altra riga. Corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici invertibili.



Eliminazione di Gauss



L'eliminazione di Gauss, che risale ai primi dell' ottocento, consiste nel semplificare una matrice, sommando ad una *riga* il multiplo di un'altra riga. Corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici invertibili.



Eliminazione di Gauss



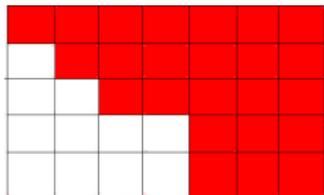
L'eliminazione di Gauss, che risale ai primi dell' ottocento, consiste nel semplificare una matrice, sommando ad una *riga* il multiplo di un'altra riga. Corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici invertibili.



Eliminazione di Gauss



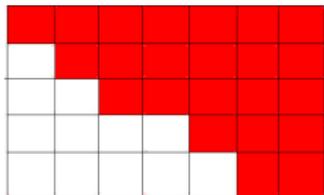
L'eliminazione di Gauss, che risale ai primi dell' ottocento, consiste nel semplificare una matrice, sommando ad una *riga* il multiplo di un'altra riga. Corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici invertibili.



Eliminazione di Gauss



L'eliminazione di Gauss, che risale ai primi dell' ottocento, consiste nel semplificare una matrice, sommando ad una *riga* il multiplo di un'altra riga. Corrisponde alla moltiplicazione a sinistra per matrici invertibili.



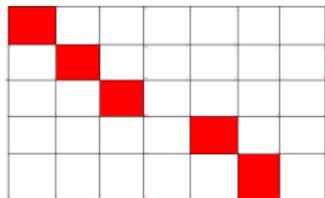
Eliminazione di Gauss e forma canonica

sommando righe “all’indietro”

■			■		■
	■		■		■
		■	■		■
			■		■
				■	■

Eliminazione di Gauss e forma canonica

sommando righe “all’indietro”



...lavorando sulle *colonne* otteniamo una forma canonica !

Matrici di rango uno

Una matrice A con coefficienti a_{ij} ha *rango* uno se e solo se esistono scalari x_i, y_j tali che

$$a_{ij} = x_i y_j$$

Matrici di rango uno

Una matrice A con coefficienti a_{ij} ha *rango* uno se e solo se esistono scalari x_i, y_j tali che

$$a_{ij} = x_i y_j$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot (y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4) = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 & x_0 y_2 & x_0 y_3 & x_0 y_4 \\ x_1 y_0 & x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 & x_1 y_4 \\ x_2 y_0 & x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 & x_2 y_4 \\ x_3 y_0 & x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 & x_3 y_4 \end{pmatrix}$$

Esempio di una matrice di rango uno

Una matrice stocastica 4×4

$$A = \begin{bmatrix} .105 & .14 & .07 & .035 \\ .03 & .04 & .02 & .01 \\ .03 & .04 & .02 & .01 \\ .135 & .18 & .09 & .045 \end{bmatrix}$$

ottenuta come $\begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.45 \end{bmatrix} \cdot [0.3 \ 0.4 \ 0.2 \ 0.1]$

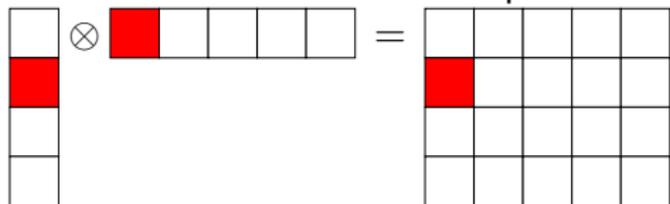
Scegliendo coordinate opportune...

Se posso cambiare *coordinate*, la rappresentazione di una matrice di rango uno diventa

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

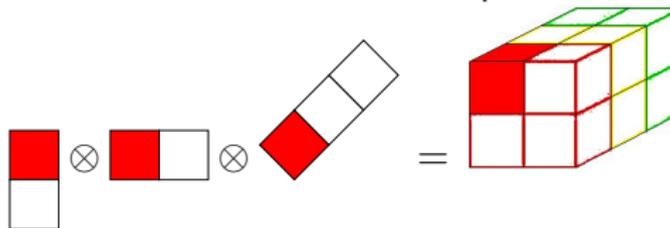
I tensori decomponibili (di rango uno)

Questa è una matrice decomponibile (cioè di rango uno, l'eliminazione di Gauss corrisponde a cambiare coordinate)



The diagram illustrates the decomposition of a 3x5 matrix into a column vector and a row vector. On the left, a 3x5 matrix is shown with a red square in the top-left cell. This is followed by a tensor product symbol \otimes and a 1x5 row vector with a red square in the first cell. An equals sign follows, leading to a 3x5 matrix with a red square in the top-left cell. To the right of the resulting matrix is the equation $a_{ij} = x_i y_j$.

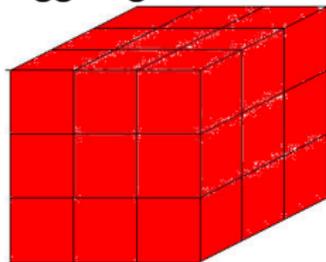
Questo è un tensore decomponibile, lo chiameremo di rango uno



The diagram illustrates the decomposition of a 3D tensor into three vectors. On the left, a 2x2 matrix with a red square in the top-left cell is followed by a tensor product symbol \otimes and a 1x2 row vector with a red square in the first cell. This is followed by another tensor product symbol \otimes and a 3D vector represented as a tilted rectangle with a red square in the top-left corner. An equals sign follows, leading to a 3D cube with a red square in the top-left corner. To the right of the resulting cube is the equation $a_{ijk} = x_i y_j z_k$.

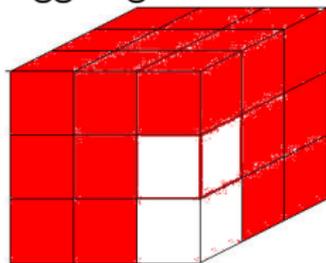
Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



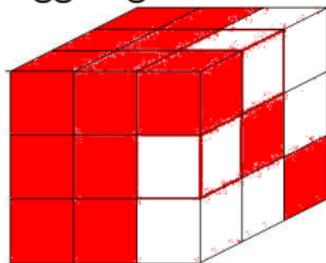
Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



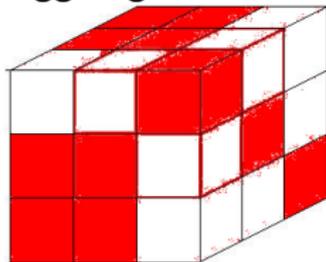
Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



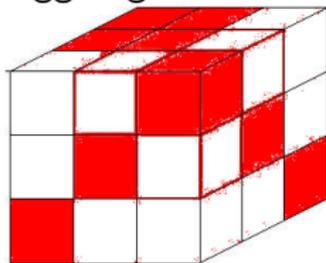
Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



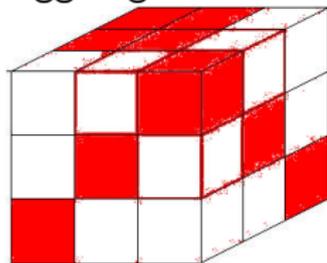
Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

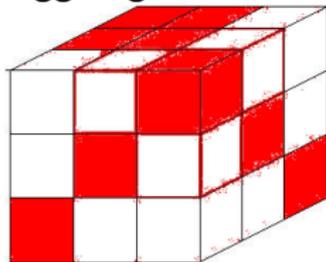
Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



Quanti zeri possiamo trovare ?

Tentiamo l'eliminazione di Gauss su un tensore 3-dimensionale

Aggiungiamo un multiplo di una fetta ad un'altra fetta.



Quanti zeri possiamo trovare ?

Strassen ha dimostrato nel 1983 che rimangono sempre almeno 5 coefficienti non nulli. Anzi, almeno 5 (> 3) addendi decomponibili.



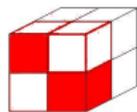
Le 6 forme canoniche di un tensore $2 \times 2 \times 2$



generale, rango 2 .

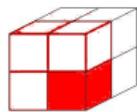


l'iperdeterminante si annulla.



simmetriche)!

supporto su una fetta (le sole forme non



rango 1.

$2 \times 2 \times 2$ è uno dei pochi casi fortunati, dove una tale classificazione è possibile.

Eliminazione di Gauss ed azione di gruppi

Un calcolo dimensionale mostra che non possiamo trovare un numero finito di forme canoniche.

- La dimensione di $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ è n^3 (numero di coefficienti).
- La dimensione di $GL(n) \times GL(n) \times GL(n)$ è $3n^2$, *troppo piccola per $n \geq 3$* .

Lo stesso ragionamento funziona per tensori generali

$\mathbb{R}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{n_d}$, $d \geq 3$, con poche eccezioni in dimensione piccola.

Le Matrici sono state create da Dio

Parafrasando Max Noether e Federigo Enriques, possiamo scherzare che

- Le Matrici sono state create da Dio



Le Matrici sono state create da Dio

Parafrasando Max Noether e Federigo Enriques, possiamo scherzare che

- Le Matrici sono state create da Dio



- I Tensori sono stati creati dal Diavolo



I tensori possono essere visti come punti di uno *spazio vettoriale*.
Un esempio significativo è il seguente:

Equazione $x^2 + bx + c = 0$.

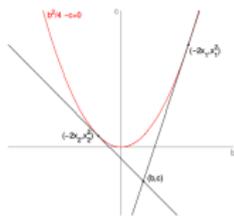


Matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$.



Punto (b, c) nel piano \mathbb{R}^2 .

Soluzione geometrica dell' equazione di secondo grado

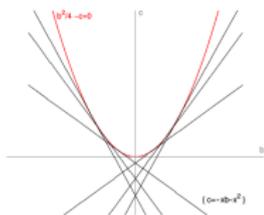


Risoluzione grafica di $x^2 + bx + c = 0$.

I punti (b, c) tali che

$$\begin{cases} b = 2t \\ c = t^2 \end{cases}$$

appartengono alla *parabola* $b^2 - 4c = 0$ e corrispondono a equazioni che sono quadrati.



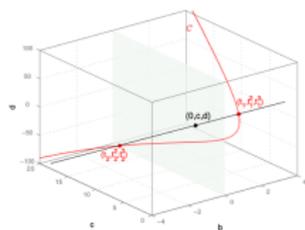
Rette tangenti, nella regione $b^2 - 4c > 0$.

Soluzione geometrica dell' equazione di terzo grado

Equazione $x^3 - 3bx^2 + 3cx - d = 0$. I punti (b, c, d) sulla curva

$$\begin{cases} b = t \\ c = t^2 \\ d = t^3 \end{cases}$$

appartengono alla *cubica gobba* e corrispondono a equazioni che sono cubi.



Una secante alla cubica gobba.

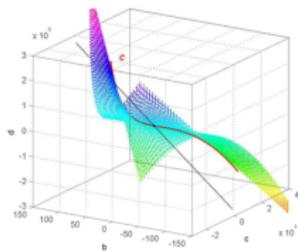
Il punto $(0, c, d)$ appartiene alla retta *secante* la cubica gobba nei punti (t_1, t_1^2, t_1^3) , (t_2, t_2^2, t_2^3) se e solo se t_1, t_2 sono radici dell'equazione risolvente $ct^2 - dt - c^2 = 0$.

Una formula alternativa a quella di Cardano (1545 ?)

Equazione $x^3 + 3cx - d = 0$.

Sia $\alpha^3 = \frac{t_1}{t_2}$ e τ radice cubica primitiva di 1. Allora le soluzioni di $x^3 + 3cx - d = 0$ sono

$$x_i = \frac{t_1 - \alpha\tau^i t_2}{1 - \alpha\tau^i} \quad \text{per } i = 0, 1, 2.$$



Ogni secante alla cubica gobba giace dalla stessa parte rispetto alla superficie *tangente* alla cubica. L'equazione della superficie tangente è il discriminante della risolvente. L'equazione ha tre soluzioni reali se e solo se corrisponde a un punto dalla parte opposta delle secanti, rispetto alla superficie tangente alla cubica.

La SVD e le sue origini.

La *Decomposizione a Valori Singolari (SVD)* è lo strumento che permette di calcolare la migliore approssimazione in rango k di una matrice, è stata sviluppata da Beltrami (1873) e da Jordan (1874).



Approccio geometrico:
migliore approssimazione \leftrightarrow punto più vicino.

Decomposizione a Valori Singolari

Se M è una matrice (reale) $m \times n$, la SVD di M è

$$M = U\Sigma V^t$$

dove

U è $m \times m$ **ortogonale** ,

V è $n \times n$ **ortogonale** ,

$\Sigma = D(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ è $m \times n$ **diagonale**, con gli unici valori non nulli $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ sulla diagonale, sono chiamati i **valori singolari** di M . Sono la radice quadrata degli autovalori di $M^t M$.

$$r = \text{rango}(M)$$

Se M è simmetrica allora $U = V$ e la SVD si riconduce al teorema spettrale $M = UDU^t$.

Esempi di SVD

La SVD calcola la decomposizione di una matrice M come somma di matrici di rango 1.

Sia ad esempio

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora la SVD di M è

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} -.82631 & .0446582 & -.561442 \\ .0883261 & -.974242 & -.207488 \\ -.556246 & -.22104 & .801082 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12.5599 & 0 & 0 \\ 0 & 3.66274 & 0 \\ 0 & 0 & .912972 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.161802 & -.974941 & -.152676 \\ -.567938 & -.0345247 & .822347 \\ -.807011 & .219768 & -.54812 \end{bmatrix} \\ &= 12.5599 \begin{bmatrix} -.82631 \\ .0883261 \\ -.556246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.161802 & -.974941 & -.152676 \end{bmatrix} + \\ &\quad 3.66274 \begin{bmatrix} .0446582 \\ -.974242 \\ -.22104 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.567938 & -.0345247 & .822347 \end{bmatrix} + \\ &\quad .912972 \begin{bmatrix} -.561442 \\ -.207488 \\ .801082 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.807011 & .219768 & -.54812 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Migliore approssimazione in rango 2

La migliore approssimazione in rango 2 traslascia il valore singolare minimo, cioè il **blu**.
E' uguale a

$$\begin{aligned} M' &= \begin{bmatrix} -.82631 & .0446582 \\ .0883261 & -.974242 \\ -.556246 & -.22104 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12.5599 & 0 \\ 0 & 3.66274 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.161802 & -.974941 & -.152676 \\ -.567938 & -.0345247 & .822347 \end{bmatrix} \\ &= 12.5599 \begin{bmatrix} -.82631 \\ .0883261 \\ -.556246 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.161802 & -.974941 & -.152676 \end{bmatrix} + \\ &\quad 3.66274 \begin{bmatrix} .0446582 \\ -.974242 \\ -.22104 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -.567938 & -.0345247 & .822347 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Compressione di immagini

La SVD può essere usata per comprimere immagini, cioè per salvare i dati essenziali di una immagine, riducendo la memoria utilizzata.

Una immagine 512×512 (in scala di grigi) viene salvata come una matrice 512×512 , usualmente di rango 512.

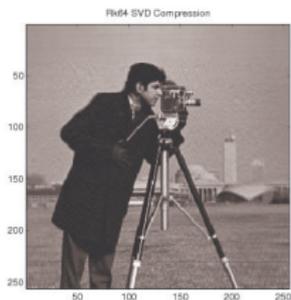
Vediamo la compressione di un esempio classico.

Immagini create da Emanuele Frandi, Alessandra Papini (Università di Firenze).

Immagine originale è 256×256

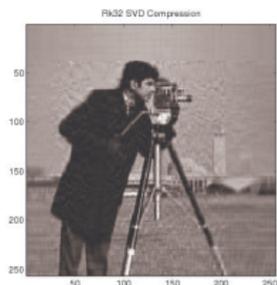


rango 256

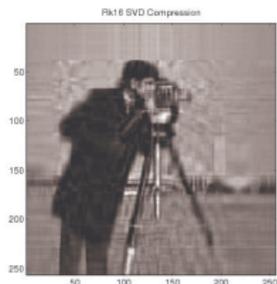


rango 64

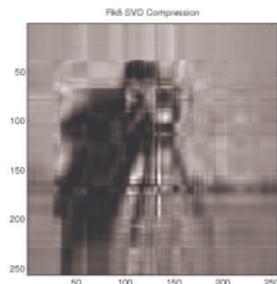
Immagini di rango piccolo



rango 32



rango 16



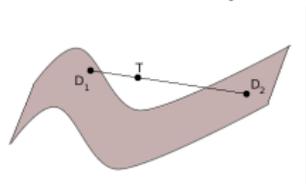
rango 8

Geometria della decomposizione di tensori

La decomposizione di un tensore T è

$$T = \sum_{i=1}^r D_i$$

con D_i decomponibili e r minimo (chiamato il **rango**).



In molti casi di interesse (per $d \geq 3$), la decomposizione di tensori è **unica** (a meno dell'ordine degli addendi), questo permette di ricostruire D_i da T . Questo è alla base di molte applicazioni, e rende i tensori perfino più utili delle matrici.



Congettura di Comon (2005)

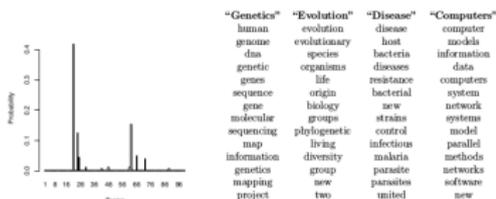
Un tensore simmetrico T ha una decomposizione minimale simmetrica, cioè $T = \sum_{i=1}^r D_i$ dove anche i D_i sono simmetrici.

Decomposizione di tensori per modelli di argomenti



A. Bhaskara , M. Charikar , A. Vijayaraghavan

hanno proposto nel 2013 di calcolare le probabilità per le occorrenze di **tre** parole, e poi calcolare la decomposizione di un tensore 3-dimensionale. Qui l'unicità della decomposizione del tensore è cruciale.



Il problema del cocktail party

- abbiamo p persone in una stanza, che parlano,
- p microfoni sparsi nella stanza,
- registriamo il suono a N intervalli regolari.

Per la sovrapposizione delle onde sonore, abbiamo il modello

$$Y = MX,$$

- dove la riga i di X contiene il suono prodotto dalla persona i a ogni intervallo.
- la riga j di Y contiene il suono registrato dal microfono j a ogni intervallo.

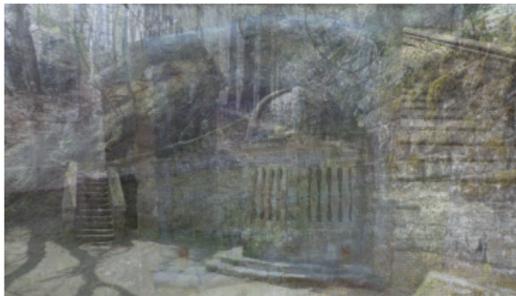


Gli investigatori vogliono ricostruire tutti i discorsi.

La fotocamera guasta

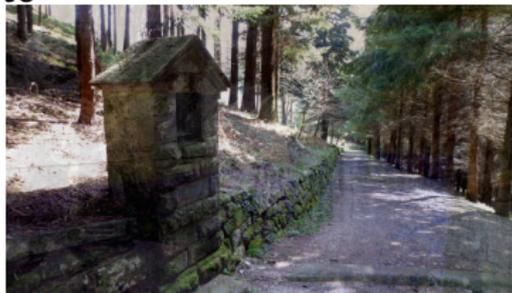


immagini di Nick Vannieuvenhoven



La fotocamera guasta

Ricostruite



Originali



La fotocamera guasta

Ricostruite



Originali



Il Determinante 2×2

Il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione non nulla se e solo se

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

Il Determinante 3×3

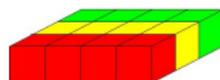
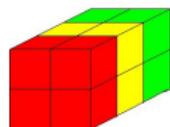
Il sistema lineare nelle incognite (x_1, x_2, x_3)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione non nulla se e solo se

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = 0$$

Appiattimento (flattening)



Appiattimento di un tensore

$3 \times 2 \times 2$ su una matrice 3×4

$$\begin{bmatrix} a_{000} & a_{001} & a_{010} & a_{011} \\ a_{100} & a_{101} & a_{110} & a_{111} \\ a_{200} & a_{201} & a_{210} & a_{211} \end{bmatrix}$$

Teorema (Cayley, 1845)

Sia A un tensore $3 \times 2 \times 2$ e siano A_{00} , A_{01} , A_{10} , A_{11} le sottomatrici 3×3 ottenute dall'appiattimento 3×4 , cancellando rispettivamente una delle quattro colonne. Il sistema multilineare

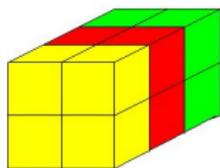
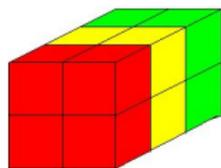
$$\begin{cases} a_{000}x_0y_0 + a_{001}x_0y_1 + a_{010}x_1y_0 + a_{011}x_1y_1 = 0 \\ a_{100}x_0y_0 + a_{101}x_0y_1 + a_{110}x_1y_0 + a_{111}x_1y_1 = 0 \\ a_{200}x_0y_0 + a_{201}x_0y_1 + a_{210}x_1y_0 + a_{211}x_1y_1 = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non nulle se e solo se

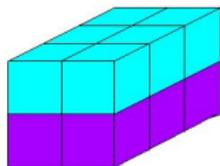
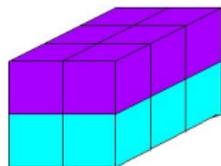
$$\text{Det}(A) := \det A_{01} \det A_{10} - \det A_{00} \det A_{11} = 0$$

$\text{Det}(A)$ è l'iperdeterminante del tensore $3 \times 2 \times 2$ A .

Cambio di segno



Se scambio tra loro due fette 2×2 "verticali" l'iperdeterminante *rimane invariato*.



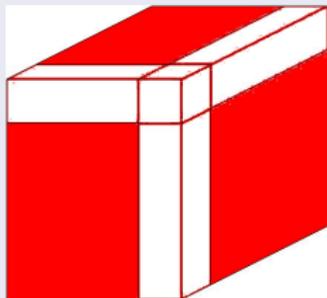
Invece se scambio tra loro le due fette 3×2 "orizzontali" l'iperdeterminante *cambia segno*.

L'iperdeterminante in generale.



Teorema (Cayley, 1845)

Un tensore A può essere ricondotto, con una trasformazione lineare



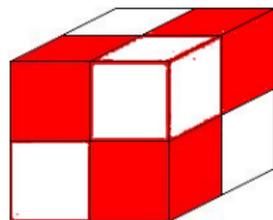
*di variabili, alla forma $\text{Det}(A) = 0$ se e solo se $\text{Det}(A) = 0$ dove (Det) è un polinomio irriducibile, chiamato **iperdeterminante**.*

Quando la disuguaglianza triangolare $n_j \leq \sum_{i \neq j} n_i$ è soddisfatta, l'iperdeterminante descrive la **varietà duale** della varietà di Segre dei tensori decomponibili.

L'iperdeterminante $2 \times 2 \times 2$

Sia A un tensore $2 \times 2 \times 2$

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) = & (a_{000}^2 a_{111}^2 + a_{001}^2 a_{110}^2 + a_{010}^2 a_{101}^2 + a_{011}^2 a_{100}^2) + \\ & -2(a_{000} a_{001} a_{110} a_{111} + a_{000} a_{010} a_{101} a_{111} + a_{000} a_{011} a_{100} a_{111} + \\ & a_{001} a_{010} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{011} a_{110} a_{100} + a_{010} a_{011} a_{101} a_{100}) + \\ & +4(a_{000} a_{011} a_{101} a_{110} + a_{001} a_{010} a_{100} a_{111}) \end{aligned}$$



Alcuni problemi aperti nella ricerca contemporanea.

- Qual è il rango di un tensore $n_1 \times \dots \times n_d$ generale? (Noto solo nei casi $n \times n \times n$ e $2 \times \dots \times 2$).
- la congettura di Comon.
- il calcolo efficiente di una decomposizione tensoriale, nel maggior numero di casi possibili (problema NP-hard).
- la complessità computazionale dell'iperdeterminante.

Grazie dell'attenzione !

